11.2.2 Výrazy

Předpoklady:

Př. 1: Jsou dána kladná reálná čísla a, b a reálná čísla r, s. Doplň vzorce pro mocniny:

a) $(a+b)^r =$ b) $a^{-r} =$ c) $\quad = a^{rs}$

a) $(a+b)^r =$ nejde (nemáme vzorec pro reálnou mocninu součtu. Existuje pouze vzorec pro přirozenou mocninu. Mocninu nelze trhat podle plus nebo mínus).

b) $a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}$ c) $\left(a^r\right)^s = \left(a^s\right)^r = a^{rs}$

Př. 2: Urči množinu všech $x \in R$, pro která má smysl výraz $\dfrac{\sqrt{x-6}}{\sqrt{8-2x}}$ **1 bod**

Pod odmocninou nesmí být záporné číslo, ve jmenovateli nesmí být nula $\Rightarrow$ najednou musí platit:

- $x-6 \geq 0 \;\Rightarrow\; x \geq 6$,
- $8-2x > 0 \;\Rightarrow\; 4 > x$,

Obě podmínky nemohou být splněny najednou $\Rightarrow$ $D(x) = \emptyset$

Př. 3: Pro $a \in R$ uprav do tvaru trojčlenu: $\left(x\cdot\sqrt{3}-3\right)^2 - x\cdot\sqrt{12}$. **1 bod**

$$\left(x\cdot\sqrt{3}-3\right)^2 - x\cdot\sqrt{12} = \left(x\cdot\sqrt{3}\right)^2 - 2\cdot x\cdot\sqrt{3}\cdot 3 + 3^2 - x\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{3} = 3x^2 - x\cdot 6\sqrt{3} + 9 - x\cdot 2\sqrt{3} =$$
$$= 3x^2 - x\cdot 8\sqrt{3} + 9$$

Př. 4: Je dán výraz $\dfrac{3y+15}{4-y}\cdot(5-y)$. Urči hodnoty $y \in R$ pro které je hodnota výrazu rovna nule. **1 bod**

Hodnota lomeného výrazu je rovna nule, když je nule roven čitatel výrazu $\Rightarrow$

- $3y+15 = 3(y+5) = 0 \Rightarrow y = -5$
- $5-y = 0 \Rightarrow y = 5$

$y = -5,\ y = 5$

Př. 5: Je dán výraz $\dfrac{-12}{5-3x}$. Urči všechna $x \in R$, pro která je tento výraz kladný. **1 bod**

Hodnota zlomku je kladná, pokud má čitatel i jmenovatel stejné znaménko. Čitatel je záporný $\Rightarrow$ záporný musí být i jmenovatel.

$5-3x < 0 \qquad / +3x$

$5 < 3x \quad / : 3$

$x > \frac{5}{3}$

$x \in \left(\frac{5}{3}; \infty \right)$

Př. 6: Je dán výraz $\frac{18(y-3)^2}{18-6y}$ s reálnou proměnnou *y*. Které tvrzení je pravdivé?

A) Pro $y = 3$ je hodnota výrazu rovna 0.

B) Pro $y = 1000^{105}$ je výraz kladný.

C) Hodnota výrazu je vždy nenulová.

D) Pro $y \neq 3$ je výraz roven $-\frac{(y-3)^2}{6y}$.

E) Pro $y \neq 3$ je výraz roven $3(y-3)$.

Upravíme si výraz, abychom mohli snáze odpovídat na otázky:

$\frac{18(y-3)^2}{18-6y} = \frac{3 \cdot 6(y-3)^2}{6(3-y)} = -3(y-3), \; y \neq 3$

Hled vidíme, že pro všechna $y \neq 3$ je hodnota výrazu nenulová a správně je bod C). Ostatní body nemusíme kontrolovat. Pro jistotu.

A) Není pravda. Pro $y = 3$ není hodnota výrazu definována.

B) Není pravda. $y = 1000^{105}$ je větší než 3, proto $(y-3) > 0$ a $-3(y-3) < 0$.

C) Je pravda. Upravený výraz by měl nulovou hodnotu pouze pro $y = 3$, ale tato hodnota proměnné *y* je zakázána podmínkou.

D) Není pravda. $-\frac{(y-3)^2}{6y} \neq -3(y-3)$

E) Není pravda. $3(y-3) \neq -3(y-3)$

Pravdivé je tvrzení C).

Př. 7: Rozhodni o každém z následujících tvrzení, je-li pravdivé pro všechna $a, b \in R$, či nikoli. **max. 2 body**

A) $(a-b)^2 = (b-a)^2$

B) $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$

C) $a^3 \cdot a^5 = a^{15}$

D) $\sqrt{a^2} = a$

A) $(a-b)^2 = \left[(-1)\cdot(b-a)\right]^2 = (-1)^2 \cdot (b-a)^2 = 1 \cdot (b-a) = (b-a)^2$ - pravdivé tvrzení

B) $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$ - nepravdivé tvrzení, obecně není možné roztrhnout mocninu nebo odmocninu podle sčítání. Dosazení: $5=\sqrt{25}=\sqrt{16+9}=\sqrt{4^2+3^2}\neq 4+3=7$.

C) $a^3\cdot a^5=a^{3+5}=a^8\neq a^{15}$ - nepravdivé tvrzení

D) $\sqrt{a^2}=|a|\neq a$ - nepravdivé tvrzení. Rovnost $\sqrt{a^2}=a$ platí pouze pro nezáporná čísla (například $\sqrt{(-3)^2}=\sqrt{9}=3\neq -3$).

Př. 8: Je dán výraz $V(y)=\dfrac{(y+4)^2\cdot(y^2-9)(y^2+1)}{(y^2-16)(y+3)^2(y+1)}$. Hodnota výrazu $V(y)$ je rovna nule pro: A) právě tři celá čísla, B) právě dvě kladná čísla, C) právě dvě záporná čísla, D) právě jedno kladné a jedno záporné číslo E) alespoň jedno kladné číslo. **2 body**

Výraz upravíme a stanovíme podmínky:

$$\frac{(y+4)^2(y^2-9)(y^2+1)}{(y^2-16)(y+3)^2(y+1)}=\frac{(y+4)^2(y-3)(y+3)(y^2+1)}{(y-4)(y+4)(y+3)^2(y+1)}=\frac{(y+4)(y-3)(y^2+1)}{(y-4)(y+3)(y+1)}$$

Podmínky: $y\neq -4;\,-3;\,-1;\,4$

Hodnota výrazu je rovna nule, pokud je nule roven její čitatel:

- $(y+4)=0\Rightarrow y=-4$ zakázáno podmínkou,
- $(y-3)=0\Rightarrow y=3$,
- $y^2+1=0$ nenastane nikdy, protože $y^2\geq 0$.

$\Rightarrow$ Hodnota výrazu se rovná nule pouze pro $y=3$ (tedy pro alespoň jedno kladné číslo) $\Rightarrow$ správně je možnost E).

Př. 9: Rovnost $\dfrac{b}{a^3+3a}=\dfrac{1}{a^2+3}$ platí:
A) pro všechna reálná čísla *a*, *b*.
B) pro libovolné reálné číslo *b* a libovolné nenulové reálné číslo *a*.
C) jen pro $a=b$, přičemž *a* je libovolné nenulové reálné číslo,
D) jen pro $a=b$, přičemž *a* je libovolné nenulové reálné číslo různé od -3,
E) pro všechna reálná čísla *a*, *b*, kde $a\neq 0$ a současně $a\neq -3$. **2 body**

Upravíme si výrazy tak, aby si byly co nejpodobnější a stanovíme podmínky.

$\dfrac{b}{a^3+3a}=\dfrac{b}{a(a^2+3)}=\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{1}{(a^2+3)}$ se má rovnat $\dfrac{1}{a^2+3}$.

Podmínky: $a\neq 0$, $a^2+3\neq 0$ vždy, protože $a^2\geq 0$.

Pokud se mají oba výrazy rovnost, musí platit $\dfrac{b}{a}=1$, což platí vždy, pokud je výraz $\dfrac{b}{a}$ definován ($a\neq 0$) a zároveň platí $a=b$ $\Rightarrow$ správně je možnost C).

Př. 10: Pro $x, y \in R$ platí: $x < 0, y = -3$. Který z následujících výrazů může být za výše uvedených podmínek pro některé hodnoty x záporný?

A) $x \cdot y$ B) $x^2 - y$ C) $y^2 - x$ D) $\frac{1}{x} - y$ E) $\frac{x^2}{1-y}$ **2 body**

Procházíme jednotlivé možnosti.
A) $x \cdot y$: součin dvou záporných čísel je kladný $\Rightarrow$ výraz $x \cdot y$ nemůže být záporný.

B) $x^2 - y$: od kladného čísla x^2 odečítáme záporné číslo y (tedy ke kladnému číslu přičítáme kladné číslo) $\Rightarrow$ výsledek je kladný $\Rightarrow$ výraz $x^2 - y$ nemůže být záporný.

C) $y^2 - x$: od kladného čísla y^2 odečítáme záporné číslo x (tedy ke kladnému číslu přičítáme kladné číslo) $\Rightarrow$ výsledek je kladný $\Rightarrow$ výraz $y^2 - x$ nemůže být záporný.

D) $\frac{1}{x} - y$: od záporného čísla $\frac{1}{x}$ odečítáme záporné číslo x (tedy k zápornému číslu přičítáme kladné číslo) $\Rightarrow$ výsledek může být záporný i kladný $\Rightarrow$ výraz $\frac{1}{x} - y$ může být záporný (konkrétně pokud je $\frac{1}{x} < -3 \Rightarrow -\frac{1}{3} < x < 0$) $\Rightarrow$ správná možnost je D)

E) $\frac{x^2}{1-y}$: kladné číslo x^2 dělíme kladným číslem $1 - y = 1 - (-3) = 4$ $\Rightarrow$ výsledek je kladný $\Rightarrow$ výraz $\frac{x^2}{1-y}$ nemůže být záporný.
Správná možnost je D).

Př. 11: Je dán výraz V s reálnou proměnou x: $V(x) = \frac{x^2}{x(x-2)} + \frac{x}{x-1} - \frac{x}{x-2}$.

Které z následujících tvrzení je pravdivé?
A) Hodnota výrazu V je nulová pro $x = 0$.
B) Hodnota výrazu V je rovna 2 pro $x = 2$.
C) Hodnota výrazu V má pro $x = -5$ a $x = 5$ opačná znaménka.
E) Hodnota výrazu V je vždy kladná.
D) Hodnota výrazu V nemůže být rovna 1. **2 body**

Zapíšeme podmínky výraz upravíme.
$x \neq 0; 1; 2$

$$\frac{x^2}{x(x-2)} + \frac{x}{x-1} - \frac{x}{x-2} = \frac{x}{(x-2)} + \frac{x}{x-1} - \frac{x}{x-2} = \frac{x}{x-1}$$

Zkoumáme pravdivost jednotlivých tvrzení:
A) Hodnota výrazu V je nulová pro $x = 0$.
Nepravdivé tvrzení. Hodnota výrazu V není pro $x = 0$ definována.

B) Hodnota výrazu V je rovna 2 pro $x = 2$.

Nepravdivé tvrzení. Hodnota výrazu *V* není pro $x=2$ definována.

C) Hodnota výrazu *V* má pro $x=-5$ a $x=5$ opačná znaménka.
Dosadíme do upraveného tvaru:

- $x=-5: \frac{x}{x-1}=\frac{-5}{-5-1}=\frac{5}{6}$
- $x=5: \frac{x}{x-1}=\frac{5}{5-1}=\frac{5}{4}$

Tvrzení je nepravdivé.

D) Hodnota výrazu *V* je vždy kladná.
Aby byla hodnota výrazu vždy kladná, musel by čitatel i jmenovatel mít stejné znaménko. To evidentně není pravda, stačí vzít libovolné $x\in(0;1)$. Pro všechna *x* z tohoto intervalu je čitatel kladné číslo a jmenovatel číslo záporné.

E) Hodnota výrazu *V* nemůže být rovna 1.
Zkusíme vypočítat hodnotu *x*, pro kterou by se hodnota výrazu rovna 1.

$$\frac{x}{x-1}=1 \quad /(x-1)$$
$$x=x-1$$
$$0=-1$$

Takové *x* neexistuje $\Rightarrow$ možnost *E* je správná.

Matematika plus

Př. 12: Pro $x\in R\setminus\{0\}$ uprav: $\frac{\left(\frac{2}{x}\right)^{-2}}{\left(\frac{1}{x}\right)^{-1}}+x\cdot 2^{-2}=$. **1 bod**

$$\frac{\left(\frac{2}{x}\right)^{-2}}{\left(\frac{1}{x}\right)^{-1}}+x\cdot 2^{-2}=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2}}{\frac{x}{1}}+x\cdot\frac{1}{4}=\frac{\frac{x^2}{4}}{x}+\frac{x}{4}=\frac{x}{4}+\frac{x}{4}=\frac{x}{2}$$

Př. 13: Výraz s proměnnou $y\in R$ rozlož na součin dvojčlenů. **1 bod**

$(3x+2)^2-x^2=$

$$(3x-5)^2-x^2=\left[(3x-5)-x\right]\left[(3x-5)+x\right]=(2x-5)(4x-5)$$

Př. 14: Platí: $x,\ y\in(-\infty;0)$, $x\neq y$. Které tvrzení je pravdivé?

A) Součin *xy* nemusí být větším číslem, než je hodnota každého z činitelů *x*, *y*.
B) Rozdíl $x-y$ je vždy záporný.

C) Hodnota výrazu $\frac{y}{x}\cdot\sqrt{x^2}$ musí být vždy kladná.
D) Hodnota výrazu x^{-1} nemusí být vždy záporná.
E) Hodnota výrazu $\left[-(-y)\cdot y\right]$ může být záporná.

A) Součin xy nemusí být větším číslem, než je hodnota každého z činitelů x, y.
Obě čísla x, y jsou záporná, jejich součin je kladný a tedy větší než čísla x, y. Tvrzení je nepravdivé.

B) Rozdíl $x-y$ je vždy záporný.
Od záporného čísla x odečítáme záporné číslo y, tedy k zápornému číslu přičítáme kladné číslo. Pokud je $y<x$, je výsledek kladný (například $-1-(-2)=1$). Tvrzení je nepravdivé.

C) Hodnota výrazu $\frac{y}{x}\cdot\sqrt{x^2}$ musí být vždy kladná.
Výraz $\frac{y}{x}\cdot\sqrt{x^2}$ představuje součin dvou kladných čísel (zlomek $\frac{x}{y}$ má čitatel i jmenovatel záporný, $\sqrt{x^2}=|x|$), je tedy vždy kladný. Tvrzení je pravdivé.

D) Hodnota výrazu x^{-1} nemusí být vždy záporná.
Platí: $x^{-1}=\frac{1}{x}$. Zlomek s kladným čitatelem a záporným jmenovatelem je vždy záporný. Tvrzení je nepravdivé.

E) Hodnota výrazu $\left[-(-y)\cdot y\right]$ může být záporná.
Upravíme výraz: $\left[-(-y)\cdot y\right]=y\cdot y=y^2$. Pro všechna reálná záporná čísla platí $y^2>0$.
Tvrzení je nepravdivé.

Pravdivé je tvrzení C).

Př. 15: Výraz s proměnnou $y\in R$ rozlož na součin lineárních dvojčlenů.
$x^3-3x^2-4x+12=$

$$x^3-3x^2-4x+12=x^2(x-3)-4(x-3)=(x-3)(x^2-4)=(x-3)(x-2)(x+2)$$

Př. 16: Jestliže mnohočlen $P(x)$ s proměnou $x\in R$ vydělíme trojčlenem (x^2-x+3), dostaneme neúplný podíl $(x+2)$ a zbytek (-5). Urči mnohočlen $P(x)$.

Podle zadání platí $P(x):(x^2-x+3)=(x+2)$ zbytek (-5). Musí tedy platit:
$$P(x)=(x+2)\cdot(x^2-x+3)+(-5)=x^3-x^2+3x+2x^2-2x+6-5=x^3+x^2+x+1$$

Shrnutí: